Министерство образования и науки Российской Федерации

ПРОГРАММА-МИНИМУМ

кандидатского экзамена по специальности

01.01.07 «Вычислительная математика»

по физико-математическим наукам

Программа-минимум

содержит 7 стр.

2007

Введение

В основу настоящей программы положены следующие дисциплины: функциональный анализ; уравнения математической физики; численные методы. Программа разработана экспертным советом Высшей аттестационной комиссии по математике и механике при участии Института вычислительной математики РАН, Московского Государственного Университета им. М. В. Ломоносова и Института прикладной математики.

1. Функциональный анализ

Метрические, нормированные, гильбертовы пространства.

Метрические пространства. Непрерывные отображения. Компактные множества.

Принцип сжатых отображений, методы последовательных приближений и их приложения. Линейные, нормированные, банаховы и гильбертовы пространства.

Сильная и слабая сходимость. Задача о наилучшем приближении. Наилучшее равномерное приближение. Минимальное свойство коэффициентов Фурье.

Линейные функционалы и операторы.

Непрерывные линейные операторы. Норма и спектральный радиус оператора.

Сходимость операторов; ряд Неймана и условия его сходимости. Теоремы о существовании обратного оператора. Мера обусловленности линейного оператора и ее применение при замене точного уравнения (решения) приближенным.

Линейные функционалы. Сопряженное пространство. Теорема Банаха-

Штейнгауза и ее приложения. Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала (для гильбертова пространства). Спектр оператора. Сопряженные, симметричные, самосопряженные, положительно определенные, вполне непрерывные операторы и их спектральные свойства. Вариационные методы минимизации квадратичных функционалов, решения уравнений и нахождения собственных значений (методы Ритца, Бубнова-Галеркина, наименьших квадратов).

Дифференцирование нелинейных операторов, производные Фреше и Гато. Метод Ньютона, его сходимость и применение.

Пространства функций C, L_2, L_p, W_p^l.

Обобщенная производная. Неравенства Пуанкаре-Стеклова-Фридрихса. Понятие о теоремах вложения.

2. Задачи математической физики

Математические модели физических задач.

Математические модели физических задач, приводящие к уравнениям математической физики. Основные уравнения математической физики; постановки задач. Корректно и некорректно поставленные задачи.

Обобщенное решение краевых задач для эллиптических уравнений.

Дивергентная форма записи эллиптического оператора. Понятие об обобщенном решении. Основные свойства гармонических функций (формулы Грина, теоремы о среднем, принцип максимума). Фундаментальное решение и функция Грина для уравнения Лапласа.

Задача Коши.

Задача Коши для уравнения теплопроводности и уравнения колебаний
(в одномерном и многомерном случаях).

Фундаментальные решения. Характеристики.

Понятие об обобщенных решениях. Обобщенные решения смешанных задач для уравнений параболического и гиперболического типов; существование, единственность и непрерывная зависимость от данных задачи. Теорема Стеклова о разложении в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля.

3. Численные методы

Численные методы алгебры.

Прямые и итерационные методы решения систем линейных уравнений с полными матрицами и матрицами специального вида. Одношаговые итерационные методы.

Чебышевские одношаговые итерационные методы. Оптимальный набор чебышевских параметров и вычислительная устойчивость. Трехчленные (двушаговые) чебышевские итерационные методы. Методы спуска и метод сопряженных градиентов.

Приближение функций.

Общие свойства систем ортогональных многочленов. Многочлены Лежандра и Чебышева; их свойства и приложения. Интерполяционные многочлены. Выбор узлов интерполяции.

Быстрое дискретное преобразование Фурье. Интерполяция нелокальными и локальными сплайнами.

Численное интегрирование.

Интерполяционные квадратурные формулы. Задача оптимизации квадратуры. Квадратурные формулы типа Гаусса. Многомерные квадратурные формулы. Понятие о методе Монте-Карло. Интегрирование сильно осциллирующих функций.

Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Численные методы решения задачи Коши и краевых задач. Оценка погрешности, сходимость и устойчивость. Методы прогонки и стрельбы. Разностные схемы для решения дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами. Понятие о жестких системах обыкновенных дифференциальных уравнений и методах их решения.

Разностные и вариационно-разностные методы решения уравнений математической физики.

Основные понятия (аппроксимация, устойчивость, сходимость). Методы построения разностных схем (метод сеток, интегро-интерполяционный метод, метод аппроксимации интегральных тождеств, вариационно-разностные и проекционно-разностные методы, метод Галеркина, метод конечных элементов, метод аппроксимации квадратичного функционала); их применение к решению краевых и начально-краевых задач для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений. Оценка порядка аппроксимации и сходимости. Двухслойные и трехслойные схемы; их устойчивость.

Экономичные методы решения нестационарных многомерных задач. методы решения нелинейных уравнений (теплопроводности и газовой динамики). Дивергентные и монотонные разностные схемы. Схемная и искусственная вязкость.

Методы решения сеточных уравнений.

Прямые методы (прогонки, быстрого дискретного преобразования Фурье, циклической редукции). Метод последовательной верхней релаксации, неявные схемы с эквивалентными по спектру операторами, попеременно-треугольный метод. Методы расщепления и переменных направлений. Понятие о методе Федоренко. Оценки скорости сходимости.

Методы решения обратных и некорректных задач.

Применение методов регуляризации, минимизации сглаживающего функционала и итерационных методов для решения вырожденных, несовместных и плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений и интегральных уравнений первого рода.

Основная литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Изд.6-е. М.: МГУ, 1999.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
3. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
4. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. Изд.4-е. М.: Физматлит, 2000.
5. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977.
6. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Наука,
7. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1982.
8. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Физматлит, 2001.
9. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.
10. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. Изд.2-е. М.: Наука, 1977.
11. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
12. Денисов А.М. введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994.

Дополнительная литература

1. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.

2. Мысовских И.П. Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981.